Possível solução usando algoritmos genéticos

1- Natureza do problema

É um problema de maximização (do lucro final) e tem apenas um critério a ser otimizado.

2- Conjunto de variáveis e codificação

As variáveis manipuláveis que afetam a função objetivo são: número de garrafas tipo leite (L) e número de garrafas tipo suco (S) produzidas pela fábrica. Portanto o cromossomo será formado por dois genes, o primeiro correspondendo à quantidade de garrafas tipo L e o segundo correspondendo à quantidade de garrafas tipo S.

Cada variável só pode tomar valores inteiros e o limite inferior para ambos é 0. O limite superior para L é dado no enunciado do problema como sendo 800. O limite superior para S pode ser encontrado supondo que a fábrica só produza tipo S, isto é, em 60 horas semanais, produziria 1200 peças. Porém, se fosse colocado no depósito somente garrafas tipo S, a capacidade seria excedida (1200*20 = 24000 > 15000), assim, o limite superior para este tipo de garrafas é 750 (15000/20). Supondo uma representação binária, ambas as variáveis podem ser representadas com 10 bits ($800 \leq 2^{10}$ e $750 \leq 2^{10}$). Logo, o comprimento total do cromossomo será 20 bits, consequentemente o espaço de busca será 2^{20} = 1.048.576, um valor computacionalmente pequeno e de fácil avaliação com um método enumerativo (busta exaustiva).

3- Função objetivo e função de fitness

Deseja-se maximizar o lucro que é composto da produção/venda de garrafas dos dois tipos, logo a função objetivo é dada por: lucro(L,S) = 5*L + 4,5*S. Esta função nunca vai gerar valores negativos, mesmo com L e S variando entre seus limites possíveis. Desta maneira, é garantido o princípio da não-negatividade da função de *fitness* que é igual à função objetivo (considerações sobre as restrições serão feitas no item 5).

Seria desejável normalizar a função de fitness para que a mesma tenha um valor máximo igual a 1. Desta maneira é mais fácil a visualização do seu crescimento sabendo-se o ponto máximo atingível. Para realizar esta normalização, é necessário saber o valor máximo que a função pode assumir, o que não é conhecido, sendo este justamente aquilo que se deseja maximizar. Entretanto é possível fazer uma estimativa grosseira de um valor limite superior, já que são sabidos os valores máximos possíveis de L e S (respectivamente 800 e 750). Desta forma estabelece-se o limite superior de 800*5 + 750*4,5 = 7375 para normalizar a função de *fitness*.

4- Restrições do problema

- Máximo tempo de utilização semanal da máquina: $(6/100)*L + (5/100)*S \leq 60$
- Máximo espaço disponível no depósito: $10*L + 20*S \leq 15000$
- Máxima demanda de garrafas tipo leite: $L \leq 800$
- Máxima produção possível de garrafas tipo suco: $S \leq 750$

5- Satisfação das restrições

Existem várias alternativas de satisfazer as restrições, sendo que a mais simples (e, talvez, a mais ineficiente) delas é simplesmente não permitir a existência de indivíduos que não satisfaçam qualquer das restrições. Devido ao caráter didático deste problema e, em função da forma de codificação adotada (binário natural) é mais interessante utilizar a técnica de penalidades sugerida por Goldberg (pag. 85).

O primeiro passo é definir a função Φ. Goldberg utiliza a função quadrática, também aqui adotada.

Em segundo lugar devem ser definidas as funções de restrições h_i (i=1..4). Há que se garantir que cada função de restrição dê um valor positivo proporcional à violação dos seus limites, e um valor nulo quando isto não ocorrer. Assim:

$$h_1(L,S) = \max\{0\ ,\ (6*L + 5*S)/100 - 60\}$$
$$h_2(L,S) = \max\{0\ ,\ (10*L + 20*S)-15000\}$$
$$h_3(L) = \max\{0\ ,\ L-800\}$$
$$h_4(S) = \max\{0\ ,\ S-750\}$$

Há um problema adicional a ser resolvido que é a questão da escala de cada função de restrição. Por exemplo, se $h_1(L,S)$ for violada em 10 unidades, isto é muito mais significativo do que uma violação de mesmo valor na função $h_2(L,S)$. Para contornar estas diferenças de escala, é interessante normalizar cada h_i. É importante lembrar neste ponto que a função de *fitness* já foi normalizada no intervalo [0,1]. Assim:

$$h_1(L,S) = (\max\{0\ ,\ (6*L + 5*S)/100 - 60\})/60$$
$$h_2(L,S) = (\max\{0\ ,\ (10*L + 20*S)-15000\})/15000$$
$$h_3(L) = (\max\{0\ ,\ L-800\}/800)$$
$$h_4(S) = (\max\{0\ ,\ S-750\}/750)$$

Como a função Φ é o somatório dos h_i e estes estão normalizados entre [0,1], no pior caso (obviamente hipotético), Φ poderia atingir 4. Para restringir o valor de Φ também ao mesmo intervalo, fazemos a contrição individual de cada h_i ser 1/4, logo:

$$\Phi = (h_1(L,S) + h_2(L,S) + h_3(L) + h_4(S))/4$$

Em terceiro lugar é preciso definir o coeficiente de penalidade r, que quantifica a influência do conjunto das violações na função de *fitness*. Este valor geralmente é definido empiricamente quando da implementação prática do problema. Numa primeira aproximação poderíamos fazer r=-1, o que significa que no pior caso hipotético (citado anteriormente), a função de *fitness* zerada.

Levando em consideração a satisfação das restrições, a função de *fitness* final do problema é dada por:

$$fitness = \frac{5.L + 4{,}5.S}{7375} - \left(\begin{array}{l} \dfrac{\max\left\{0, \dfrac{6.L + 5.S}{100} - 60\right\}}{15} + \cdots \\ \dfrac{\max\{0, (10.L + 20.S) - 15000\}}{3750} + \cdots \\ \dfrac{\max\{0, L - 800\}}{200} + \cdots \\ \dfrac{\max\{0, S - 750\}}{187{,}5} \end{array} \right)$$

6- **<u>Solução final</u>**

Número ótimo de garrafas tipo leite produzidas por semana: 643
Número ótimo de garrafas tipo suco produzidas por semana: 428
Lucro total obtido: R$ 5141,00